UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2018-3
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 27/02/2019
DACBHCC — 18:00-19:50 h

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:
$$\begin{aligned} y^2 + x^2 + 5 &= 8x \\ xy^2 + x + 2 &= 8y \end{aligned}$$

a) **(1 P)** Bosqueje a mano alzada y localice las raíces, indicando valores aproximados al entero más cercano a la raíz.
b) **(1.5 P)** Determine la raíz más alejada del origen de coordenadas realizando 02 iteraciones paso a paso usando el algoritmo de Newton-Raphson para sistemas, a partir del valor obtenido en a), muestre el error usando norma infinita.
c) **(1.5 P)** Encuentre una fórmula del algoritmo de punto fijo convergente aplicando el criterio de convergencia para la raíz buscada en b).
d) **(1 P)** Realice tres iteraciones de la fórmula encontrada en c) a partir del valor inicial dado en a) y muestre el error (el cual debe ser decreciente).

Problema 2

Un móvil se mueve verticalmente hacia arriba de acuerdo a la siguiente data:

t (seg)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y (m)	1	1.4	1.6	1.8	2.1	2.3

Se desea ajustar estos datos a la función $y = Ln(at + be^t)$

(a) **(2 P)** Hallar a y b óptimos para un ajuste por mínimos cuadrados
(b) **(1 P)** Determine el factor de regresión y comente sus resultados
(c) **(1 P)** Estime la velocidad en t=0.4 s, usando la fórmula de diferenciación central de 3 puntos de la tabla y compárela con la derivada de la función de ajuste. ¿Cuál considera más precisa?
(d) **(1 P)** Escriba un programa en MATLAB para resolver la parte (b)

Problema 3

Sea la integral con límite infinito:
$$\int_1^\infty e^{-x}\sqrt{x}\,dx$$

a) **(1.5 P)** Aproxime la integral reemplazando el limite infinito por un valor b=11 aplique el Método de Simpson 1/3, con h=1.
b) **(1.5 P)** Haga el cambio de variable x=1/t y aproxime la nueva integral con limites finitos usando la regla del rectángulo dividiendo el intervalo en 8 particiones iguales.
c) **(1.5 P)** Resuelva la integral dada en b) aplicando la Cuadratura de Gauss con **N=3**.
d) **(0.5 P)** Evalué el error para cada caso el valor exacto es 0.4916517 y comente sus resultados.

Problema 4

La ecuación siguiente se utiliza para modelar la deflexión del mástil de un bote sujeto a la fuerza del viento:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{f(z)}{2EI}(L-z)^2$$

Donde $E=1.25\text{x}10^8$, es el módulo de Elasticidad, I=0.05, es el momento de inercia, L=30, es la longitud del mástil además se sabe que la fuerza del viento varía con la altitud de acuerdo a la relación:

$$f(z) = \frac{200z}{5+z}e^{-z/15}$$

Calcule la deflexión para z=1.5 si para z=0, y=0 y dy/dz=0:

(a) **(2 P)** Usando Euler con un paso de h=0.5
(b) **(2 P)** Usando Runge-Kutta 2 con un paso de h=0.5
(c) **(1 P)** Escriba un programa en Matlab para la solución de b)

Ing. Robert Castro S.

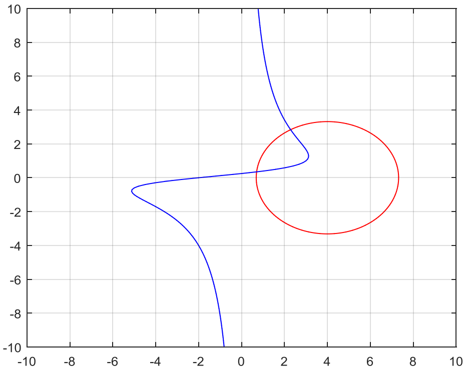
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
DACBHCC

P.A. 2018-3
27/02/2019
18:00-19:50 h

Solucionario

Problema 1

a)



Raíces aproximadas (1,0) y (2,3)

b) Aplicando Newton-Raphson para la mayor raíz:

$$x_0 = 2 \qquad y_0 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 2x_0 - 8 & 2y_0 \\ y_0^2 + 1 & 2x_0y_0 - 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_0^2 - 8x_0 + y_0^2 + 5 \\ x_0y_0^2 + x_0 - 8y_0 + 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2632 \\ -0.1579 \end{bmatrix} \qquad err = 0.2632$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 2.2632 \qquad y_1 = y_0 + \Delta y = 2.8421$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0227 \\ -0.0027 \end{bmatrix} \qquad err = 0.0227$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 2.2859 \qquad y_2 = y_1 + \Delta y = 2.8394$$

c)

$$y = (8x - x^2 - 5)^{\frac{1}{2}} = G_1(x, y)$$

$$x = \frac{8y - 2}{y^2 + 1} = G_2(x, y)$$

$$J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0.7559 & 0 \\ 0 & -0.5200 \end{bmatrix}$$

$$\|J(x_0, y_0)\|_\infty = 0.7559 < 1$$

Por lo tanto es convergente

d)

Realizando iteraciones:

$$y = (8x - x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{8y - 2}{y^2 + 1}$$

X	Y	ERR
2	3	-----
2.2	2.6548	0.3542
2.3958	2.7857	0.1958
2.3157	2.9028	0.1171

Problema 2

a)

i	1	2	3	4	5	6
t_i (seg)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i (m)	1	1.4	1.6	1.8	2.1	2.3
$Y_i=e^{y_i}$	2.7183	4.0552	4.9530	6.0496	8.1662	9.9742
$\widehat{Y_i}$	2.7557	3.8387	5.0568	6.4399	8.0245	9.8552

$$y = Ln(at + be^t)$$
$$Y = e^y = at + be^t$$

Aplicando la ecuación normal:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t_1} & \boldsymbol{e^{t_1}} \\ \boldsymbol{t_2} & \boldsymbol{e^{t_2}} \\ \boldsymbol{t_3} & \boldsymbol{e^{t_3}} \\ \boldsymbol{t_4} & \boldsymbol{e^{t_4}} \\ \boldsymbol{t_5} & \boldsymbol{e^{t_5}} \\ \boldsymbol{t_6} & \boldsymbol{e^{t_6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e^{y_1}} \\ \boldsymbol{e^{y_2}} \\ \boldsymbol{e^{y_3}} \\ \boldsymbol{e^{y_4}} \\ \boldsymbol{e^{y_5}} \\ \boldsymbol{e^{y_6}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Mc = N}$$
$$\boldsymbol{M^T Mc = M^T N}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{2.2} & \boldsymbol{6.433} \\ \boldsymbol{6.433} & \boldsymbol{20.3796} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{22.9292} \\ \boldsymbol{71.3703} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{2.3645} \\ \boldsymbol{2.7557} \end{bmatrix}$$

b) Calculo del factor de regresión

$$\widehat{Y_i} = at_i + be^{t_i}$$

$$Ym = \sum_{i=1}^{6} \frac{Y_i}{6} = 5.9861$$

$$\boldsymbol{R^2} = \frac{\sum \left(\widehat{Y_i} - Ym\right)^2}{\sum (Y_i - Ym)^2} = \boldsymbol{0.9753}$$

c)

$$\boldsymbol{v(0.4) = \frac{y(0.6) - y(0.2)}{2x0.2} = 1}$$

$$v(t) = \frac{a + be^t}{at + be^t} \Rightarrow v(0.4) = 1.2806$$

La primera fórmula es más precisa debido a que usa datos de la tabla directamente.

d)

```
x=0:0.2:1, y=[ 1 1.4 1.6 1.8 2.1 2.3]
Y=exp(y)'
P=[x' exp(x)']
M=P'*P
N=P'*Y
c=M\N
a=c(1), b=c(2)
Ys=a*x+b*exp(x)
Ym=mean(Y)
R2=sum((Ys-Ym).^2)/sum((Y-Ym).^2)
```

Problema 3

a) Simpson 1/3

$$\int_{1}^{11} e^{-x}\sqrt{x}\,dx$$

h=1
I_1=h/3*(f(1)+4*f(2)+2*f(3)+ 4*f(4)+2*f(5)+ 4*f(6)+2*f(7)+ 4*f(8)+2*f(9)+ 4*f(10)+f(11))
I_1=0.50561813

b) Regla del rectangulo:

c) $\int_0^1 e^{-1/t}\sqrt{1/t}\,/t^2 dt$

h=1/8
I_2=2*h*(F(1/8)+ F(3/8)+ F(5/8)+ F(7/8))=0.49166517

c) Cuadratura de Gauss:

$$t = \frac{s+1}{2} \quad dt = ds/2$$

$$\int_{0}^{1} e^{\frac{-2}{s+1}}\sqrt{\frac{2}{s+1}}\,/(s+1)^2\,\frac{ds}{2}$$

$$I_3 = \frac{5}{9} * G\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} * G(0) + \frac{5}{9} * G\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 0.47073977$$

d) Errores:

Ie=0.50728223
Ea=0.00166410
Eb=0.01561706
Ec=0.03654246

Se observa que la regla de Simpson resultó más precisa.

Problema 4

a) **Euler**

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{\frac{16}{10^6}z}{5+z}e^{-z/15}(30-z)^2 = f(z)$$

$$\frac{dy}{dz} = v$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\frac{16}{10^6}z}{5+z}e^{-z/15}(30-z)^2$$

$$z_0 = \mathbf{0} \qquad y_0 = \mathbf{0} \qquad v_0 = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{h = 0.5}$$

$$z_{n+1} = z_{n+1}+\text{h}$$

$$y_{n+1} = y_n + h * v_n$$

$$v_{n+1} = v_n + h * f(z_n)$$

i	**Z**	**y**	**v=y'**
0	**0**	**0**	**0**
1	**0.5**	**0**	**0**
2	**1.0**	**0**	**0.00061216**
3	**1.5**	**0.00030608**	**0.00166118**

b) **Runge-Kutta 2**

$$z_{n+1} = z_{n+1} + h$$
$$k_1 = h * v_n$$
$$l_1 = h * f(z_n)$$
$$k_2 = h * (v_n + l_1)$$
$$l_1 = h * f(z_n + h)$$
$$y_{n+1} = y_n + 1/2 * (k_1 + k_2)$$
$$v_{n+1} = v_n + 1/2 * (l_1 + l_2)$$

i	**z**	**y**	**v=y'**
0	**0**	**0**	**0**
1	**0.5**	**0**	**0.00030608**
2	**1.0**	**0.00030608**	**0.00113667**
3	**1.5**	**0.00113667**	**0.00233959**

c) **Programa**

```
% RK2
clear all, f=inline('16/1e6*z*exp(-z/15)*(30-z)^2/(5+z)')
z(1)=0, y(1)=0, v(1)=0, h=0.5
for i=1:3
   k1=h*v(i),l1=h*f(z(i)), k2=h*(v(i)+l1), l2=h*f(z(i)+h)
   z(i+1)=z(i)+h, y(i+1)=y(i)+0.5*(k1+k2), v(i+1)=v(i)+0.5*(l1+l2)
end
```